

GREȘELI FRECVENTE ÎN APLICAREA REGULILOR LUI L'HOSPITAL

PROF. RUSU NICOLETA GINA
COLEGIUL TEHNIC DE ELECTRONICĂ ȘI TELECOMUNICAȚII „GH. MĂRZESCU” IAȘI

Deseori elevii greșesc în aplicarea regulilor lui L'Hospital deoarece se obișnuiesc să folosească mecanic aceste teoreme fără a verifica ipotezele lor. Vom prezenta în continuare o serie de greșeli frecvente pe care elevii le fac atunci când aplică regulile lui L'Hospital.

1) Există situații în care deși nu avem o nedeterminare ($\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| \neq \infty$) elevii aplică regula.

De exemplu, dacă aplicăm regula lui L'Hospital în cazul limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos x}$, obținem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2)'}{(\cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-\sin x} = -2$$

$$\text{Dar } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Observăm că $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \neq \infty$ și deci nu sunt îndeplinite condițiile teoremei lui L'Hospital.

2) În alte situații elevii aplică regula lui L'Hospital când $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nu există deși

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ există. De exemplu, să considerăm următoarele limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}, \quad \lim_{x \searrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\ln(1+x)}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}.$$

Observăm că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 1 \cdot 0 = 0.$

Pe de altă parte, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right)'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$ nu există. Aceasta deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

și $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$ nu există datorită limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$, care nu există.

În celelalte două exemple avem:

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\ln(1+x)} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} \cdot \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} \cdot \lim_{x \searrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \frac{1}{\ln e} \cdot 0 = 0, \text{ iar}$$

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)'}{\left(\ln(1+x)\right)'} = \lim_{x \searrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}}, \text{ limită care nu există.}$$

De asemenea,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1 \text{ și}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sin x)'}{(x + \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \text{ nu există datorită limitei } \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x.$$

3) O greșeală foarte des întâlnită este dată de posibilitatea intrării într-un „cerc vicios”, atunci când se aplică regula lui L'Hospital. Exemple de astfel de situații sunt date de limitele:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad (\text{unde } a > 0, a \neq 1).$$

Observăm că în toate cele trei exemple sunt îndeplinite condițiile teoremei lui L'Hospital (cazul $\frac{0}{0}$) și totuși la nici una din aceste limite nu putem aplica regula lui L'Hospital întrucât, în caz contrar:

- La prima limită vom folosi derivata funcției $\sin x$ în 0, ori în calculul acestei derivate intervine tocmai limita pe care vrem să o calculăm. Prin urmare intrăm într-un „cerc vicios”.

- La cea de-a doua limită vom folosi derivata funcției $\ln(1+x)$ în 0, iar în calculul acestei derivate intervine tocmai limita pe care vrem să o calculăm; intrăm de asemenea într-un „cerc vicios”.

- În calculul celei de-a treia limite vom folosi derivata funcției a^x în 0, iar în calculul acestei derivate intervine tocmai limita pe care vrem să o calculăm.

Limitele aflate într-o astfel de situație trebuie calculate prin alte metode decât regula lui L'Hospital. Spre exemplu, cele trei limite de mai sus le putem calcula astfel:

Considerăm următoarele inegalități:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ și } \operatorname{tg} x < x < \sin x, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

de unde obținem:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ și } 1 < \frac{\sin x}{x} < \cos x, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

Prin trecere la limită cu $x \searrow 0$ în prima din inegalitățile de mai sus, respectiv cu $x \nearrow 0$ în cea de-a doua, se obține:

$$\exists \lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ și } \exists \lim_{x \nearrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \text{ Prin urmare, } \exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Pentru a doua limită vom folosi limita fundamentală $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

$$\text{Deci } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \ln e = 1.$$

Pentru cea de-a treia limită vom folosi limita de mai sus:

Notăm $a^x - 1 = u$, de unde obținem $a^x = u + 1$ și deci $x = \frac{\ln(1+u)}{\ln a}$. Prin urmare avem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u \ln a}{\ln(1+u)} = \ln a \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+u)}{u}} = \ln a.$$

4) În unele situații deși sunt satisfăcute condițiile din ipoteza teoremei lui L'Hospital, aplicarea acesteia poate fi ineficientă întrucât calculul limitei $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ este mai complicat decât

cel al limitei inițiale. Spre exemplu, să considerăm următoarea limită: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$. Observăm că

sunt verificate condițiile teoremei lui L'Hospital, cazul $\frac{\infty}{\infty}$. Dacă aplicăm de două ori regula lui L'Hospital ajungem la aceeași limită de la care am plecat.

5) Uneori condiția $g'(x) \neq 0, \forall x \neq x_0$ nu este verificată de către elevi. Astfel ei pot să ajungă la un rezultat care însă nu este cel real.

6) Într-un număr redus de cazuri raportul derivatelor este confundat cu derivata raportului.

Bibliografie

[1] Catană A., Săcuiu M., Stănășilă O., *Metodica predării Analizei Matematice*, EDP, București 1983.

[2] Rusu Nicoleta, *Reguli de tip l'Hospital*, Editura Alexandru Myller, 2012.