

INEGALITĂȚI

AUTOR : PROF. MARIANA BÎRGHIȘAN
LICEUL TEHNOLOGIC DE ELECTRONICĂ ȘI TELECOMUNICAȚII „ GHEORGHE
MĂRZESCU ” IAȘI

Demonstrarea unor inegalități se realizează prin metoda directă, utilizarea unor inegalități celebre, identificarea unei inegalități care se aplică succesiv pentru toți termenii din inegalitatea dată. Metoda directă presupune efectuarea calculelor și transformarea inegalității sub forma unei sume finite de numere reale nenegative mai mare sau egală cu zero. În alte cazuri se aleg expresii potrivite pentru variabilele din inegalități celebre și prin calcul algebric se demonstrează cerința.

Lucrarea oferă posibilitatea valorificării metodei de identificare a unei inegalități, care prin aplicarea succesivă pentru toți termenii componenți va facilita obținerea rezultatelor cerute.

Aplicații utile pentru consolidarea inegalităților

Aplicația 1.

Dacă $x, y, z > 0$, demonstrați că

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x} \leq \frac{x+y+z}{2}.$$

Soluție

Se compară expresia $\frac{xy}{x+y}$ din membrul stâng cu expresia $\frac{x+y}{4}$ din membrul drept, unde $x, y > 0$.

$$\frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4} \Leftrightarrow 4xy \leq (x+y)^2 \Leftrightarrow 4xy \leq x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow 0 \leq (x-y)^2.$$

Analog se obțin inegalitățile :

$$\frac{yz}{y+z} \leq \frac{y+z}{4}, \quad \frac{xz}{x+z} \leq \frac{x+z}{4}.$$

Prin însumarea celor trei inegalități se obține:

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x} \leq \frac{x+y}{4} + \frac{y+z}{4} + \frac{x+z}{4} = \frac{2(x+y+z)}{4} = \frac{x+y+z}{2}.$$

Are loc egalitate pentru $x=y=z$.

Aplicația 2.

Dacă $x, y, z > 0$, demonstrați că

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right).$$

Soluție

Se compară expresia $\frac{1}{x+y}$ din membrul stâng cu expresia $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$ din membrul drept, unde $x, y > 0$.

$$\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \Leftrightarrow \frac{4xy}{4xy(x+y)} \leq \frac{(x+y)^2}{4xy(x+y)} \Leftrightarrow 4xy \leq (x+y)^2 \Leftrightarrow 0 \leq (x-y)^2.$$

Analog se obțin inegalitățile :

$$\frac{1}{y+z} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right), \quad \frac{1}{z+x} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right).$$

Prin însumarea celor trei inegalități se obține:

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right).$$

Are loc egalitate pentru $x=y=z$.

Aplicația 3.

Dacă $x, y, z > 0$, demonstrați că

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} + \frac{y^2 + z^2}{y + z} + \frac{z^2 + x^2}{z + x} \geq x + y + z.$$

Soluție

Se demonstrează că $\frac{x^2 + y^2}{x + y} \geq \frac{x + y}{2}$, unde $x, y > 0$.

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} \geq \frac{x + y}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 \geq (x + y)^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 \geq x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0.$$

Analog se obțin inegalitățile :

$$\frac{y^2 + z^2}{y + z} \geq \frac{y + z}{2}, \quad \frac{z^2 + x^2}{z + x} \geq \frac{z + x}{2}.$$

Prin însumarea celor trei inegalități se obține:

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} + \frac{y^2 + z^2}{y + z} + \frac{z^2 + x^2}{z + x} \geq \frac{x + y}{2} + \frac{y + z}{2} + \frac{z + x}{2} = \frac{2(x + y + z)}{2} = x + y + z.$$

Are loc egalitate pentru $x=y=z$.

Aplicația 4.

Dacă $a, b, c > 0$, demonstrați că

$$\frac{ab}{a^2 + ab + b^2} + \frac{bc}{b^2 + bc + c^2} + \frac{ca}{c^2 + ca + a^2} \leq 1.$$

Soluție

Se demonstrează că $\frac{ab}{a^2 + ab + b^2} \leq \frac{1}{3}$, unde $a, b > 0$.

$$\frac{ab}{a^2 + ab + b^2} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3ab \leq a^2 + ab + b^2 \Leftrightarrow 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a - b)^2.$$

Analog se arată că

$$\frac{bc}{b^2 + bc + c^2} \leq \frac{1}{3}, \quad \frac{ca}{c^2 + ca + a^2} \leq \frac{1}{3}.$$

Prin însumarea celor trei inegalități se obține:

$$\frac{ab}{a^2 + ab + b^2} + \frac{bc}{b^2 + bc + c^2} + \frac{ca}{c^2 + ca + a^2} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Are loc egalitate pentru $a=b=c$.

Aplicația 5.

Dacă $a, b, c > 0$, demonstrați că

$$\frac{a}{\sqrt{(a+b) \cdot (a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(b+c) \cdot (b+a)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a) \cdot (c+b)}} \leq \frac{3}{2}.$$

Soluție

Se utilizează inegalitatea dintre media geometrică și media aritmetică.

$$\frac{a}{\sqrt{(a+b) \cdot (a+c)}} = \sqrt{\frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+c}} \leq \frac{\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} \right).$$

Analog se arată că

$$\frac{b}{\sqrt{(b+c) \cdot (b+a)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b}{b+c} + \frac{b}{b+a} \right), \quad \frac{c}{\sqrt{(c+a) \cdot (c+b)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b} \right).$$

Prin însumarea celor trei inegalități se obține:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{\sqrt{(a+b) \cdot (a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(b+c) \cdot (b+a)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a) \cdot (c+b)}} \\ & \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} + \frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b} \right) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Aplicația 6.

Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, demonstrați că

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{a+c-b} + \sqrt{b+c-a} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Soluție **Lemă** Dacă $x, y > 0$, atunci are loc inegalitatea $\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$.

Se aplică Lema pentru $x = \sqrt{a+b-c}$ și $y = \sqrt{a+c-b}$ și se demonstrează că $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{a+c-b} \leq 2\sqrt{a}$. Analog se arată că

$\sqrt{b+c-a} + \sqrt{b+a-c} \leq 2\sqrt{b}$, $\sqrt{c+b-a} + \sqrt{c+a-b} \leq 2\sqrt{c}$, apoi se însumează cele trei inegalități. Egalitatea are loc pentru $a = b = c$.

Aplicația 7.

Dacă $a, b, c > 0$, demonstrați că

$$\frac{a+b}{c^2} + \frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Soluție Se demonstrează prin metoda directă , apoi se însumează inegalitățile:

$$\frac{a}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{c} , \quad \frac{b}{c^2} + \frac{c}{b^2} \geq \frac{1}{b} + \frac{1}{c} , \quad \frac{b}{a^2} + \frac{a}{b^2} \geq \frac{1}{b} + \frac{1}{a} .$$

Aplicația 8.

Dacă $x, y, z > 0$, demonstrați că

$$\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) .$$

Soluție

$$\frac{1}{x^2 + yz} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} \right) \Leftrightarrow 4xyz \leq (y + z)(x^2 + yz) \Leftrightarrow 0 \leq (x - z)^2 y + (x - y)^2 z .$$

$$\frac{1}{x^2 + yz} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} \right) , \frac{1}{y^2 + xz} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{yx} + \frac{1}{yz} \right) , \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{zx} + \frac{1}{zy} \right) .$$

Aplicația 9.

Dacă $a, b, c > 0$, demonstrați că

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2 .$$

Soluție Se aplică inegalitatea dintre media geometrică și media aritmetică.

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}} = \sqrt{\frac{b+c}{a} \cdot 1} \leq \frac{\frac{b+c}{a} + 1}{2} = \frac{a+b+c}{2a} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{a+b+c} .$$

$$\sqrt{\frac{b}{c+a}} \geq \frac{2b}{a+b+c} , \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c} .$$

Lucrarea poate fi un suport teoretic și practic pentru elevii din clasa a IX-a, util în înțelegerea modalităților de deducere a inegalităților.

Bibliografie

1. Nicolae Mușuroaia, Dana Heuberger, Gheorghe Boroica, Florin Bojor, Vasile Pop, „Matematică de excelență pentru concursuri, olimpiade și centrele de excelență, clasa a IX - a ”, Editura Paralela 45, 2013, Pitești.
2. Marius Burtea, Georgeta Burtea, „Clasa a IX-a, Culegere de exerciții și probleme de matematică- M1”, Editura Campion, 2009, București.